УДК 004.021

Поліщук О. С., здобувачка 4 курсу
спеціальності 122 Комп'ютерні науки,
Ніколюк П. К., д-р фіз.-мат. наук, професор
кафедри інформаційних технологій

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО: УНІВЕРСАЛЬНИЙ ІНСТРУМЕНТ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Донецький національний університет імені Василя Стуса, м. Вінниця

Метод Монте-Карло (ММК) – це клас обчислювальних алгоритмів, які покладаються на багаторазовий випадковий відбір (семплінг) для отримання числових результатів. Це метод розв'язання математичних задач за допомогою моделювання випадкових величин.

Сучасна версія методу була розроблена в кінці 1940-х рр. у Лос-Аламоській національній лабораторії під час роботи над ядерною зброєю (Мангеттенський проєкт). Назву запропонував Ніколас Метрополіс на честь казино в Монте-Карло (Монако), де дядько Улама часто грав в азартні ігри, оскільки метод схожий на статистичну природу ігор (рулетка, кістки) [1].

Математичним фундаментом методу Монте-Карло є закон великих чисел, який виступає головним гарантом достовірності результату моделювання. Цей закон стверджує, що за достатньо великої кількості незалежних випробувань середнє арифметичне отриманих випадкових значень неминуче наближається до істинного математичного сподівання (шуканого розв'язку). Тобто чим більше експериментів ми проводимо, тим меншим стає відхилення нашого емпіричного результату від реальної фізичної або математичної величини.

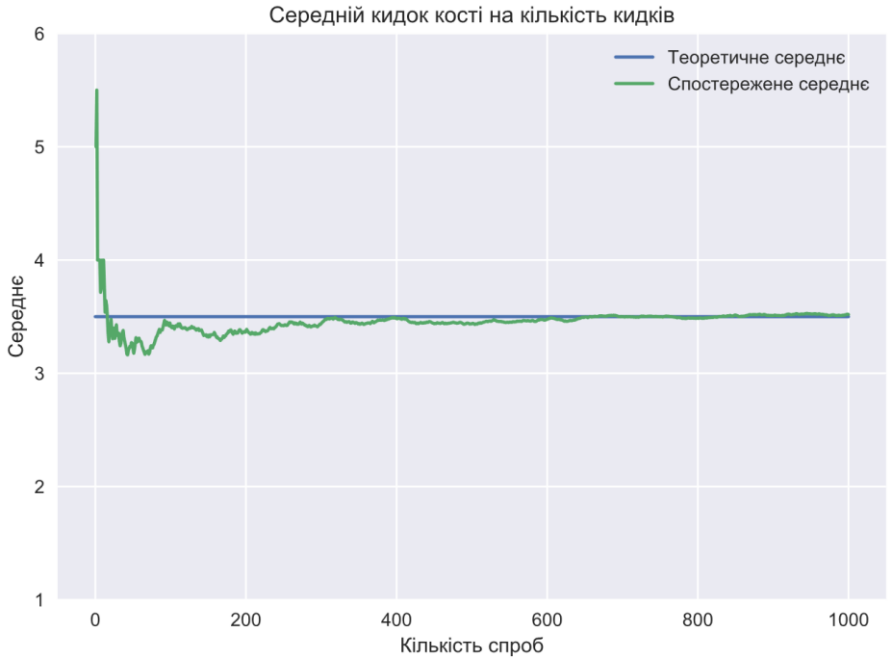


Рисунок 1 – Графічна ілюстрація Закону великих чисел

Ілюстрація закону великих чисел із використанням певного перебігу кидань кості. З тим, як кількість кидків збільшується, середнє значення всіх кидків наближується до 3.5. Різні перебіги показуватимуть різні форми кривої у частині, що відображає малу кількість кидків (ліва частина); у частині, що відображає велику кількість кидків (права частина) вони будуть дуже подібні [4].

Для глибшого аналізу точності використовується Центральна гранична теорема Тюрінга, яка дає змогу не лише отримати числову відповідь, а й оцінити її надійність шляхом побудови довірчих інтервалів. Згідно з цією теоремою, сума великої кількості незалежних випадкових величин має розподіл, близький до нормального (гаусівського). Це дає можливість досліднику чітко розуміти, з якою ймовірністю отриманий результат потрапляє в допустимі межі похибки.

Ключовою особливістю методу є специфіка оцінки похибки, яка пропорційна величині $1/\sqrt{N}$, де N – кількість проведених випробувань. Це вказує на відносно повільну збіжність алгоритму: щоб зменшити похибку в 10 разів, обсяг обчислень необхідно збільшити у 100 разів. Однак, попри таку «вартість» точності, метод Монте-Карло має вирішальну перевагу над класичними детермінованими методами: швидкість його збіжності фактично не залежить від розмірності простору, що робить його незамінним інструментом для розв’язання складних багатовимірних задач [2].

Практична реалізація методу Монте-Карло в комп’ютерному моделюванні, незалежно від специфіки задачі, завжди спирається на чітку алгоритмічну структуру. Процес починається з визначення області можливих вхідних даних. На цьому етапі дослідник має чітко окреслити межі простору, в якому відбуватиметься моделювання. Це схоже на встановлення «ігрового поля»: ми повинні знати, які параметри системи можуть змінюватися і в яких саме діапазонах, щоб уникнути генерації фізично неможливих або некоректних станів системи.

Серцем алгоритму є етап генерації випадкових чисел. Оскільки комп’ютери є детермінованими машинами, вони не можуть створити «справжню» випадковість, тому використовуються генератори псевдовипадкових чисел (PRNG).

Сучасним стандартом у цій сфері є алгоритм «Вихор Мерсенна», який забезпечує величезний період повторюваності та високу статистичну якість чисел. Важливо не просто генерувати числа, а й забезпечити їх відповідність заданому розподілу ймовірностей (наприклад, рівномірному, нормальному чи експоненціальному), що диктується фізичною природою модельованого процесу [3].

Після отримання вхідних даних настає фаза детермінованих обчислень та агрегації результатів. Для кожного згенерованого набору випадкових параметрів система виконує розрахунок за фіксованою математичною моделлю або формулою – це називається «прогоном» або «реалізацією». Коли накопичується достатня кількість таких реалізацій, отримані дані об’єднуються. Фінальна відповідь отримується шляхом статистичної обробки: результати усіх прогонів усереднюються, що дає змогу нівелювати вплив окремих випадкових відхилень і отримати стабільне, наближене до істини значення.

Щодо аналітичної оцінки ефективності, то для обґрунтування доцільності використання методу варто порівняти швидкість збіжності його похибки (ϵ) з класичними детермінованими методами (наприклад, методом Сімпсона) залежно від кількості випробувань (N) та розмірності задачі (d):

– Детерміновані методи: похибка залежить від розмірності як $\approx N^{-1/d}$. Це означає, що зі збільшенням кількості змінних (d) ефективність катастрофічно падає (так зване «прокляття розмірності»).

– Метод Монте-Карло: похибка завжди пропорційна $\epsilon \approx N^{-1/2}$ і не залежить від розмірності простору d.

Хоча для одновимірних задач ($d = 1$) класичні методи працюють швидше, для багатовимірних задач (зазвичай при $d \geq 5$) метод Монте-Карло стає безальтернативним, оскільки його точність залишається стабільною незалежно від складності системи.

Переваги:

– Можна застосовувати до задач, які не мають аналітичного розв'язку.

– Ефективність методу майже не падає зі збільшенням кількості змінних (вирішує проблему «прокляття розмірності»).

– Кожне випробування є незалежним, тому метод ідеально підходить для суперкомп'ютерів та кластерних обчислень.

Недоліки:

– Для досягнення високої точності потрібні значні ресурси.

– Отримання «точного» результату може зайняти багато часу, порівняно з детермінованими методами в задачах низької розмірності.

– Використання поганого генератора псевдовипадкових чисел може призвести до системних помилок у моделюванні.

У підсумку, метод Монте-Карло залишається одним із найпотужніших інструментів у сучасному комп'ютерному моделюванні. Зі зростанням потужності комп'ютерів сфера його застосування лише розширюється, переходячи від класичних фізичних задач до складних систем штучного інтелекту та фінансового прогнозування.

Список використаних джерел

1. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo method. *Journal of the American Statistical Association.* 1949. URL: https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/105Sp10/handouts/MetropolisUlam_TheMonteCarloMethod.pdf (дата звернення: 12.11.2025).

2. Rubinstein R. Y., Kroese D. P. Simulation and the Monte Carlo method. 3rd ed. Hoboken: Wiley. 2016.

3. Matsumoto M., Nishimura T. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation.* 1998. Vol. 8, № 1. P. 3–30. URL: https://dl.acm.org/doi/10.1145/272991.272995 (дата звернення: 12.11.2025).

4. Закон великих чисел. *Wikipedia, the free encyclopedia.* URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Закон_великих_чисел (дата звернення: 11.10.2025).